EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

V — 1 FEBRUARI 1963

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET RAILVRAAGSTUK

door

Dr. J. T. GROENMAN
GRONINGEN

In een voordracht voor het Genootschap Johann Bernoulli is onlangs door Prof. Bottema een stelling besproken uit de affiene kinematica. Waar de kinematica een vak is, dat groter belangstelling verdient, dan het krijgt, is het wellicht dienstig het probleem te bespreken uit de Euclidische kinematica, waarvan de genoemde stelling een veralgemening is. Het probleem zal vele docenten nieuw zijn.

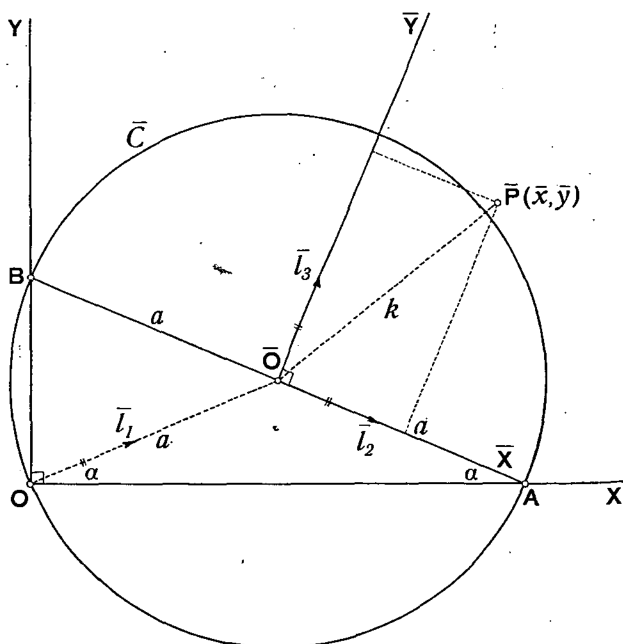


Fig. 1.

In een vast vlak V met assenstelsel XOY beweegt zich een vlak $\bar{V}$ (assenstelsel $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$) zò, dat A langs de x-as beweegt en B langs de y-as. Gevraagd wordt een bestudering van de baan, die door een punt $\bar{P}$ in het vlak $\bar{V}$ gelegen t.o.v. het assenstelsel XOY wordt beschreven.

In figuur 1 zij $\bar{O}B = \bar{O}A = \bar{O}O = a$ en $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$. Het is duidelijk dat A het interval $-2a \ldots +2a$ van de x-as doorloopt en B het interval $-2a \ldots +2a$ op de y-as.

$\bar{P}$ heeft de coördinaten $(\bar{x}, \bar{y})$.

De eenheidsvectoren hebben in het vaste assenstelsel de volgende componenten:

$$\bar{l}_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$$
$$\bar{l}_2(\cos\alpha, -\sin\alpha)$$
$$\bar{l}_3(\sin\alpha, \cos\alpha).$$

Tussen de coördinaten van $\bar{P}$ t.o.v. het stelsel XOY en t.o.v. $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ bestaan derhalve de volgende betrekkingen:

$$x = a\cos\alpha + \bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha$$
$$y = a\sin\alpha - \bar{x}\sin\alpha + \bar{y}\cos\alpha$$

(1)
$$\boxed{\begin{aligned} x &= (a+\bar{x})\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha \\ y &= \bar{y}\cos\alpha + (a-\bar{x})\sin\alpha. \end{aligned}}$$

Uit de vergelijkingen (1) lossen wij $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$ op; er komt

$$\sin\alpha = \frac{x\bar{y} - y(a+\bar{x})}{\bar{x}^2+\bar{y}^2-a^2}; \quad \cos\alpha = \frac{y\bar{y} - (a-\bar{x})x}{\bar{x}^2+\bar{y}^2-a^2}$$

Uit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ volgt dan als vergelijking van de baan van $\bar{P}$
$[x\bar{y} - y(a+\bar{x})]^2 + [y\bar{y} - (a-\bar{x})x]^2 = [\bar{x}^2+\bar{y}^2-a^2]^2$.

$x^2[(a-\bar{x})^2+\bar{y}^2] + y^2[(a+\bar{x})^2+\bar{y}^2] - 4xy\bar{y}a = [\bar{x}^2+\bar{y}^2-a^2]^2$

Stellen we $\bar{x}^2+\bar{y}^2 = k^2$, dan is hiervoor te schrijven:

(2)
$$\boxed{x^2[k^2+a^2-2a\bar{x}] + y^2[k^2+a^2+2a\bar{x}] - 4a\bar{y}\cdot xy = [k^2-a^2]^2.}$$

In 't algemeen doorloopt $\bar{P}$ dus een kegelsnede met O als middelpunt. Diametrale punten in het $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ vlak doorlopen kegelsneden, die t.o.v. elkaar 90° zijn gedraaid; immers neemt men de volgende substituties

$\bar{x} \to -\bar{x};\ \bar{y} \to -\bar{y};\ x \to y$ en $y \to -x$,

dan gaat de vergelijking in zich zelf over.

Deze kegelsneden zijn nader te beschouwen met behulp van de discriminant van het linker lid

$$16a^2\bar{y}^2 - 4[k^2+a^2-2a\bar{x}][k^2+a^2+2a\bar{x}] =$$
$$16a^2\bar{y}^2 - 4[k^4+2a^2k^2+a^4-4a^2\bar{x}^2] = 16a^2k^2-4k^4-8a^2k^2-4a^4 =$$
$$-4[k^2-a^2]^2.$$

De discriminant is niet positief; er zijn dus geen hyperbolen bij; het parabolisch geval treedt op als $k = a$; als $k \neq a$ komt er een ellips.

A. Wij beschouwen eerst $k = a$, d.w.z. $\bar{P}$ ligt op cirkel $\bar{C}(\bar{O}; a)$. (2) wordt dan:

$$x^2[2a^2-2a\bar{x}]+y^2[2a^2+2a\bar{x}]-4a\bar{y}xy = 0$$

of

$$(3) \qquad \boxed{x^2(a-\bar{x})-2\bar{y}xy+y^2(a+x) = 0}$$

d.i. een dubbelrechte, omdat de discriminant = 0.

Hiermee is aangetoond, dat $\bar{P}$ dan en slechts dan een rechte lijn beschrijft (door O), als $\bar{P}$ op $\bar{C}$ ligt.

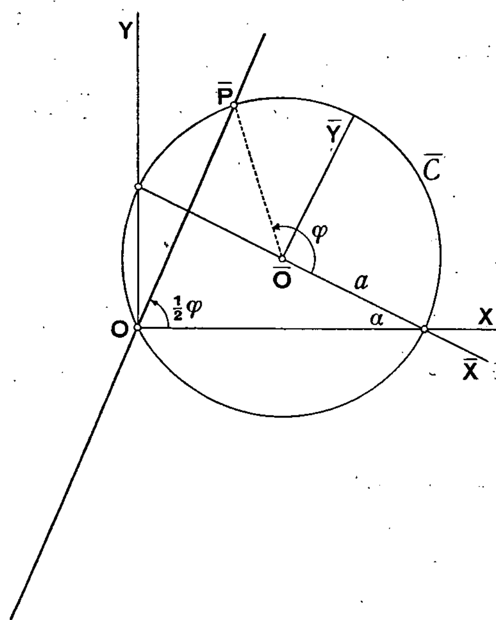


Fig. 2.

Wij substitueren voor

$$(4) \qquad \boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= a \cos \varphi \\ \bar{y} &= a \sin \varphi. \end{aligned}}$$

en vinden

$$x^2(1-\cos\varphi)-2\sin\varphi\,.\,xy+y^2(1+\cos\varphi)=0$$
$$(x\sin\tfrac{1}{2}\varphi-y\cos\tfrac{1}{2}\varphi)^2=0$$
$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi.$$

De lijn door O, waarlangs $\bar{P}$ zich beweegt, maakt dus een hoek $\frac{1}{2}\varphi$ met de $+x$-as, wat ook meetkundig evident is.

Uit (1) en (4) volgt:

$$x=a(1+\cos\varphi)\cos\alpha+a\sin\varphi\sin\alpha=a\,[\cos\alpha+\cos(\varphi-\alpha)]=2a\cos\tfrac{1}{2}\varphi\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$y=a\sin\varphi\cos\alpha+a(1-\cos\varphi)\sin\alpha=a\,[\sin\alpha+\sin(\varphi-\alpha)]=2a\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cos(\alpha-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$\bar{P}$ „trilt" dus langs de lijn door O; — zie fig. 2 —; bij de hoek α behoort de uitwijking $2a\cos(\alpha-\frac{1}{2}\varphi)$; verandert α eenparig met de tijd, dan is de beweging een harmonische trilling; de maximale uitwijking $=2a$, als $\alpha=\alpha_M=\frac{1}{2}\varphi$. De punten O, $\bar{O}$ en $\bar{P}$ liggen op een rechte lijn. Uit $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ volgt, dat lijnen behorende bij diametrale punten van $\bar{C}$ zich langs onderling loodrechte lijnen bewegen.

B. Is $k\neq a$, dan komt er een ellips.

(2′) $$A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2=A_{00}$$

De asrichtingen van de ellips zijn gegeven door het verband

$$\operatorname{tg}2\lambda=\frac{2A_{12}}{A_{11}-A_{22}}=\text{naar (2)}=\frac{-4a\bar{y}}{-4a\bar{x}}=\frac{\bar{y}}{\bar{x}}=\operatorname{tg}\varphi.$$

Hierin is λ de hoek die de as van de ellips met positieve x-as maakt.

We merken op:

1. Ligt $\bar{P}$ op de $\bar{x}$-as ($\bar{y}=0$) dan is $\lambda_1=0$ en $\lambda_2=90°$; de assen van de ellips zijn de x- en y-as.

2. Ligt $\bar{P}$ op de $\bar{y}$-as ($\bar{x}=0$), dan is $\lambda_1=45°$ en $\lambda_2=135°$; de assen zijn de bissectrices van de hoeken van x- en y-as.

3. Wanneer stelt (2) een cirkel voor?

Schrijven we (2′) homogeen, dan komt er

$$A_{11}X^2+2A_{12}XY+A_{22}Y^2=A_{00}Z^2.$$

We substitueren de coördinaten der isotrope punten $(1, \pm i, 0)$ $A_{11}-A_{22}\pm 2A_{12}i = 0$ zodat $A_{11} = A_{22}$ en $A_{12} = 0$.

Uit (2) volgt dan

$$\left.\begin{array}{r} k^2+a^2-2a\bar{x} = k^2+a^2+2a\bar{x} \\ -2a\bar{y} = 0 \end{array}\right\} \bar{x} = \bar{y} = 0$$

Het punt $\bar{O}$ is het enige punt, dat een cirkel beschrijft (straal a).

Wij bepalen nu de afstand r van O tot een punt op de ellips; uit (1) volgt:

$$\begin{aligned} r^2 = x^2+y^2 &= \{(a+\bar{x})\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha\}^2+\{\bar{y}\cos\alpha+(a-\bar{x})\sin\alpha\}^2 \\ &= \cos^2\alpha\{a^2+k^2+2a\bar{x}\}+\sin^2\alpha\{a^2+k^2-2a\bar{x}\} \\ &\qquad +\sin\alpha\cos\alpha\{4a\bar{y}\} \\ &= a^2+k^2+2a\bar{x}\cos 2\alpha+2a\bar{y}\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

De r is extreem als

$$-2a\bar{x}\sin 2\alpha+2a\bar{y}\cos 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} 2\lambda.$$

wij krijgen dus één der assenuiteinden als $\alpha_M = \lambda = \frac{1}{2}\varphi$.

$$\sin 2\alpha = \pm\frac{\bar{y}}{k};\ \cos 2\alpha = \pm\frac{\bar{x}}{k}.$$

Voor de lengten der halve assen vinden we dus:

$$r^2 = a^2+k^2 \pm 2a\left(\frac{\bar{x}^2+\bar{y}^2}{k}\right) = a^2 \pm 2ak+k^2$$

(5) $$\boxed{\begin{aligned} r_1 &= a+k \\ r_2 &= |a-k|. \end{aligned}}$$

Voor de halve brandpuntsafstand komt er $c^2 = (a+k)^2-(a-k)^2 = 4ak$.

(6) $$\boxed{c = 2\sqrt{ak}.}$$

Ook hier zien we, dat voor $k = 0$ een cirkel komt met straal $r = a$ en voor $k = a$ een lijnsegment ($r_2 = 0$).

We lichten de gevonden resultaten toe in figuur 3a met 3b.

We construeren achtereenvolgens de asrichtingen der ellips (OU_1 en OU_2), daarna de eindpunten der assen en de brandpunten. (zie figuur 3a).

Tenslotte de stand van $AB(A'B')$, die $\bar{P}$ brengt in het uiteinde E_1 der lange as. Daartoe snijden we de cirkel $O(a)$ met de asrichting $(\bar{O}')$ en maken $\bar{O}'A' = \bar{O}'O$.

Indien $\bar{P}$ een cirkel $\bar{O}(k)$ doorloopt, draait de ellips — congruent aan zich zelf blijvend — om O; de assen zijn immers $|a-k|$ en $a+k$.

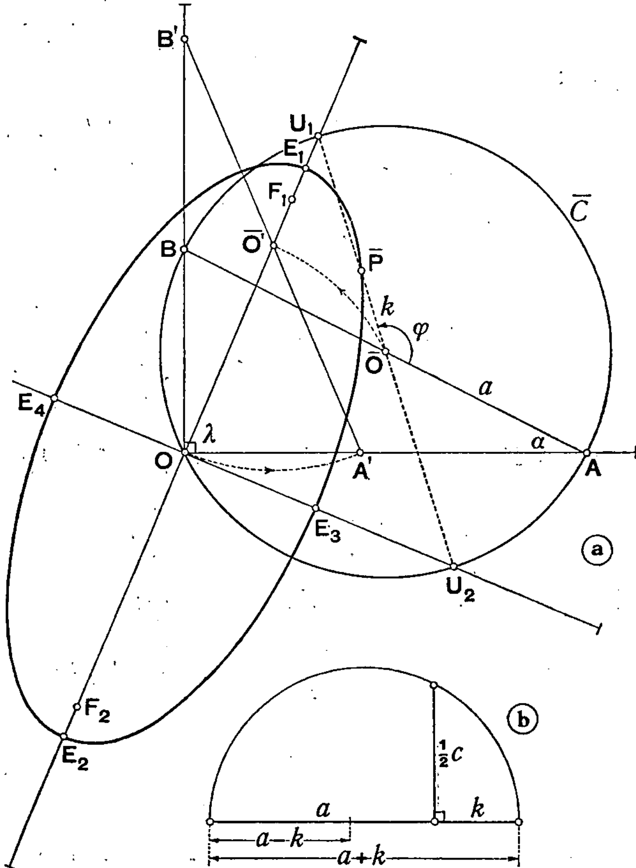


Fig. 3a en Fig. 3b.

MOGELIJKHEDEN VOOR DE VERNIEUWING VAN HET MEETKUNDE-PROGRAMMA

door

Dr. A. van Haselen

Tiel

In dit artikel wil ik enige ervaringen meedelen, die ik bij experimenten in de klas heb opgedaan.

Twee jaren achtereen sloot ik de meetkundelessen in de vierde klas van het gymnasium af met behandeling van vectoren. Als inleiding werden vectoren als pijlen beschouwd en werd er gewezen op de meetkundige betekenis van de som, het verschil en het (inwendige) produkt van vectoren. De eerste poging, om de definitie van het produkt van twee vectoren uit de cosinusregel te halen, voldeed niet al te best. De normale definitie: „**a** . **b** = **a** . projectie van **b** op **a**" leverde een goede opzet. Deze heeft het voordeel, dat de cosinusregel met vectoren bewezen kan worden. Bovendien zien de leerlingen daarbij de betekenis van het rekenen met vectoren.

Daarna werden de vectoren ingevoerd als geordende groepen van enige getallen. De vectoren op een as leveren dan de bekende getallenrechte. De vectoren in één vlak geven aanleiding tot de definitie van de som, enz. van getallenparen.

De eerste moeilijkheid ontstond bij de invoering van onafhankelijke vectoren, doordat de leerlingen nog niets van stereometrie wisten. Voor een behandeling van onafhankelijke vectoren is enige kennis van stereometrie gewenst. In R_3 kunnen de leerlingen zich nl. eenvoudiger een voorstelling maken van onafhankelijke vectoren dan in R_2.

De poging, om onafhankelijke vectoren (getallenparen) in R_2 in verband te brengen met twee onafhankelijke vergelijkingen met twee onbekenden, hadden weinig succes. In Vβ, waar ik na een korte inleiding in de stereometrie, eerst iets over vectoren in R_3 behandelde, waren de resultaten veel beter. Hierop kom ik later nog terug.

Veel succes leverde in Vβ de behandeling van lineaire afbeeldingen van een R_2 op zichzelf.

Hierbij werd uitgegaan van de formele definitie:

1. $l(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = l(\mathbf{v}_1) + l(\mathbf{v}_2)$;
2. $l(k\mathbf{v}_1) = k \,.\, l(\mathbf{v}_1)$;
3. de beelden van twee onafhankelijke vectoren zijn twee onafhankelijke vectoren.

Zelfs voor slechte leerlingen leverde het geen moeilijkheden op, bij bepaalde afbeeldingen de eigenvectoren en de bijbehorende eigenwaarden ervan te berekenen. Ook een behandeling van de constructie van het beeld van een rechte met behulp van eigenvectoren had een vrij goed succes. Voor een goed begrip van de afbeelding zijn deze constructies waardevol. Belangrijk zijn ze m.i. niet, omdat **constructies** evenals overal in de wiskunde **hulpmiddel** zijn **en geen doel.**

Om een idee te geven van de methode, waarop ik de lineaire afbeeldingen behandeld heb, bespreek ik nu eerst een vraagstuk, dat ik in de klas als voorbeeld koos.

Gegeven is een lineaire afbeelding van R_2 op zichzelf. $l(1, 0) = (0, -2)$ *en* $l(0, 1) = (1, 3)$. *Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van deze afbeelding. Bewijs, dat het beeld van de rechte l met vectorvergelijking* $\mathbf{v} = (1, 1) + k(1, 3)$ *een rechte is. Construeer het beeld van l door middel van eigenvectoren van de afbeelding.*

Oplossing. Kies een willekeurige vector (x, y). Dan is $l(x, y) = xl(1, 0) + yl(0, 1) = x(0, -2) + y(1, 3) = (y, -2x + 3y)$. De eigenvectoren en eigenwaarden vinden we uit

$$(y, -2x + 3y) = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$
$$y = \lambda x, \qquad -2x + 3y = \lambda y.$$
$$-2x + 3\lambda x = \lambda^2 x.$$

Hieruit volgt:

$$x = 0,\ y = 0 \quad \text{of} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Omdat bij iedere lineaire afbeelding geldt: $f(0, 0) = (0, 0)$, levert $x = 0$, $y = 0$ geen eigenvector van de afbeelding en geldt voor de eigenvectoren:

$$\lambda = 2, \qquad \lambda = 1.$$

Als $\lambda = 2$, dan is $y = 2x$ en zijn de vectoren $(p, 2p)$ eigenvectoren. Hiervoor geldt: $l(p, 2p) = (2p, 4p)$.

Als $\lambda = 1$, dan is $y = x$ en geldt $l(p, p) = (p, p)$.

Om het beeld van de rechte $\mathbf{v} = (1, 1) + k(1, 3)$ te vinden, schrijven we:

$$\mathbf{v} = (1 + k,\ 1 + 3k).$$

Dan is

$$l(\mathbf{v}) = (1 + k)(0, -2) + (1 + 3k)(1, 3) =$$
$$= (1 + 3k,\ 1 + 7k) = (1, 1) + k(3, 7).$$

Het beeld van l is dus een rechte.

Op l liggen de punten (1, 1) en (2, 4). Het beeld van (1, 1) is (1, 1) en dat van (2, 4) is (4, 8). Het beeld van l is dus de rechte door (1, 1) en (4, 8).

Daar de vectorvergelijking van een rechte als parametervoorstelling ervan gezien kan worden, levert het werken met de vectorvergelijking van een rechte het grote voordeel op, dat de parametermethode bij de verzamelingen hier op een ongekunstelde manier voor de dag komt.

Verder kunnen we met de lineaire afbeeldingen gemakkelijk tot een eenvoudige behandeling van coördinatentransformaties komen.

De meeste moeilijkheden levert de translatie op. De meest voor de hand liggende methode is, het assenstelsel vast kiezen. Toch beschreef ik de translatie, door het vlak vast te kiezen en het assenstelsel te verplaatsen, omdat dit eenvoudiger is voor de leerlingen. Helaas is deze methode voor het vervolg wat verwarrend.

Rotatie en spiegeling zijn lineaire transformaties. Voor de rotatie geldt:

$$r(1, 0) = (p, q),\ r(0, 1) = (-q, p) \text{ en } p^2 + q^2 = 1.$$

Voor de spiegeling geldt:

$$s(1, 0) = (p, q),\ s(0, 1) = (q, -p) \text{ en } p^2 + q^2 = 1.$$

Het bewijs, dat deze transformaties een figuur overvoeren in een daarmee congruente figuur, is eenvoudig. De eigenvectoren geven de eigenschappen van de transformaties.

Ook behandelde ik het produkt van twee lineaire afbeeldingen, voornamelijk om aan te tonen, dat het produkt van twee spiegelingen een rotatie is, enz.

Hierbij levert de formele behandeling van de stelling, dat het produkt $t_2 t_1(x, y)$ van twee lineaire transformaties t_1 en t_2 weer een lineaire transformatie is, moeilijkheden op. Het is daarom gewenst, hierover eerst een praatje te houden.

Uit de proeven bleek, dat deze onderwerpen niet veel moeilijker zijn dan de gebruikelijke; maar dat ze vrij veel extra tijd kosten, die niet in elke vijfde klas gevonden kan worden.

Zolang het tegenwoordige programma gehandhaafd blijft, verdient het daarom aanbeveling, de spiegeling en het produkt van transformaties niet te behandelen. De vermenigvuldiging t.o.v. een punt en t.o.v. een as leveren geen moeilijkheden op.

Bij de behandeling van de kegelsneden kunnen de meeste eigenschappen van de ellips direct verkregen worden uit de overeenkomstige eigenschappen van de cirkel. Verder kunnen de or-

thogonale en de gewone hyperbool gezien worden als afbeeldingen van de uit de algebra bekende hyperbool $xy = k$. Hierdoor wordt weer vrij wat tijd gewonnen. Bovendien komen de meeste problemen, die bij de afbeeldingen voorkomen, neer op het zoeken van vergelijkingen van bepaalde verzamelingen.

Daar de meeste vraagstukken, die bij het eindexamen voorkomen, over verzamelingen handelen, heeft de bovengenoemde behandeling van de analytische meetkunde dus ook veel dingen voor op de gebruikelijke.

De analytische meetkunde kan nog op een eenvoudige manier veranderd worden in een onderzoek van de eigenschappen van de algemene kwadratische functie, door de kegelsneden te zien als niveaufiguren daarvan.

Hoe kan het meetkundeonderwijs worden aangepast aan deze methode van behandeling?

In verband met deze vraag wil ik eerst iets over de meetkunde in R_3 zeggen.

Natuurlijk mag bij de stereometrie het aanbrengen van ruimte-inzicht niet ontbreken. Ruimte-inzicht kan heel goed aangebracht worden door middel van doorsneetekeningen. Liefst zou ik de doorsneden in R_3 dan ook willen zien als affine transformaties van R_2. Dit kan dan weer leiden tot een beter begrip van onafhankelijke vectoren.

De meetkundige begrippen, die de leerlingen nodig hebben om een vectormethode voor de opzet van de stereometrie te kunnen begrijpen, zijn in weinig lessen te behandelen. Dit bleek mij, toen ik gedurende een werkweek met Vβ enige uren besteedde aan het behandelen van vectoren in R_3. De loodrechte stand van een rechte en een vlak komt daarbij te voorschijn als loodrechte stand van een R_1 en een R_2.

De bekende eigenschappen van een kubus kunnen op eenvoudige manier worden bewezen. Zo komt het bewijs van de stelling, dat een lichaamsdiagonaal loodrecht staat op het vlak door twee zijvlaksdiagonalen, neer op een kleine berekening.

Ook de theorie van de zwaartelijnen van een viervlak en de stelling, dat het zwaartepunt het midden is van het verbindingslijnstuk van twee middens van overstaande ribben, levert geen enkele moeilijkheid op. Bovendien kan dan nog een meer algemene theorie over zwaartepunten gegeven worden, die toegepast kan worden op kubus en blok.

Omdat twee onderling loodrechte vlakken geen twee onderling

loodrechte vectorruimten zijn, zullen deze wel niet zo eenvoudig met vectoren kunnen worden behandeld. Een poging daartoe heb ik dan ook niet gewaagd. Hoewel ik het bij het huidige programma niet zou aandurven, de stereometrie met vectoren op te zetten, geloof ik toch, dat we daar naar toe moeten. Ik vraag me zelfs af, of het niet wenselijk zou zijn, van de stereometrie alleen die onderwerpen te eisen, die met vectoren eenvoudig behandeld kunnen worden. Natuurlijk moeten daarbij dan ook vectorvergelijkingen van vlakken ter sprake komen. Een hoofdstukje over inhouden kan dan heel goed bij de integraalrekening aan de orde komen. Het antwoord op deze vraag kan m.i. niet theoretisch gegeven worden. *Als* het de moeite waard is, dit te proberen, dan kan de mogelijkheid ervan alleen in de praktijk onderzocht worden.

De grootste moeilijkheid bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs ligt m.i. wel bij de vlakke meetkunde.

Hierbij doet zich allereerst de vraag voor: „Moet na een intuïtieve inleiding direct gestreefd worden naar een meer axiomatische opzet of moet de axiomatiek het resultaat zijn van het vlakke meetkunde onderwijs?"

Persoonlijk voel ik het meeste voor het tweede. Dit hoeft het deductieve karakter van de meetkunde niet op de achtergrond te schuiven. In de laagste klassen is het nl. onmogelijk, de betekenis van een axioma ook maar enigszins tot zijn recht te doen komen. Verder lijkt het mij alleen maar verwarrend om constructies in te voeren met behulp van (al dan niet genoemde) postulaten. Door deze postulaten wordt het idee gegeven, dat de constructies als **tekening** veel waarde hebben. Daardoor wordt het weer moeilijker, de leerlingen er later van te doordringen, dat de *eigenlijke* betekenis van een constructie een existentiebewijs is.

Een mogelijkheid voor een nieuwe opzet van de vlakke meetkunde lijkt me de volgende.

Als intuïtieve inleiding worden translaties, spiegelingen en rotaties besproken, daarna de gewone onderwerpen tot en met de parallellogrammen. Hierna kunnen de translatie en de rotatie als de som van spiegelingen behandeld worden.

De som van twee translaties, gegeven door pijlen met een **vast** beginpunt, levert dan een eenvoudige inleiding tot het vectorbegrip. Zoals het bij mijn lessen bleek, is het dan heel goed mogelijk, met voorbeelden, waarbij driehoeken enz. verschoven worden, de som en het verschil van vectoren te definiëren en de leerlingen hierover vraagstukken op te geven, die langzamerhand op een goed vectorbegrip aansturen.

Hierna kan de vermenigvuldiging van figuren (t.o.v. een vast punt) met een positieve en met een negatieve factor behandeld worden. Het is mij gebleken, dat de invoering van de som en het verschil van vectoren de behandeling van vermenigvuldiging van vectoren met een negatieve factor eenvoudiger maakt.

Waarschijnlijk zal dan ook een poging om na de invoering van goniometrische verhoudingen het produkt van vectoren in te voeren en hiermee de cosinusregel te bewijzen, succes hebben.

Enige jaren geleden heb ik het inwendige produkt van vectoren eens in de derde klas behandeld, maar het resultaat ervan was niet zo, dat ik de proef herhaalde.

Het lijkt me de moeite waard om te onderzoeken, of de meetkunde op een dergelijke manier kan worden opgebouwd.

Dit jaar besteedde ik in de tweede klas enige uren aan het invoeren van het verzamelingsbegrip. Daarbij koos ik o.a. het volgende vraagstuk als voorbeeld.

Gegeven zijn twee punten A *en* B *en twee lijnstukken* r_1 *en* r_2. *Gevraagd de verzameling* V_1 *van de punten* P, *waarvoor* $PA < r_1$. *Ook de verzameling van de punten* P, *waarbij* $PB < r_2$. *Wat is* $V_1 \cup V_2$ *en wat* $V_1 \cap V_2$?

De begrippen werden wel vrij moeilijk gevonden, maar niet zo moeilijk, dat een poging om de verzamelingen wat moderner te behandelen, niet alleszins verantwoord zou zijn.

De verzameling van de punten P, waarvoor $PA = PB$, kan dan ook gezien worden als de doorsnee van de verzameling van de punten P, waarvoor $PA \leqq PB$ en de verzameling van de punten P, waarvoor $PA \geqq PB$ is.

Bovendien kunnen de constructies van de punten, die aan enige bepaalde voorwaarden voldoen, dan gezien worden als constructies van doorsneden van gegeven verzamelingen.

Een goed begrip van verzamelingen kan moeilijk worden aangebracht, als de verzamelingen alleen uit rechten of krommen bestaan.

Als dit artikel er aanleiding toe zou kunnen geven, dat enige collega's hun oordeel over deze experimenten in Euclides zouden willen geven en ook van hun eigen experimenten de resultaten zouden willen bekendmaken, zou dit mij veel genoegen doen.

Voor het vinden van een bevredigende opzet van de meetkunde zal nog wel heel wat tijd nodig zijn. Ook zullen de eerste pogingen wel niet volledig slagen, maar het is alleszins de moeite waard, dat hieraan zo veel mogelijk zorg besteed wordt.

POOL EN POOLLIJN

door

P. WIJDENES

Zie EUCLIDES jg. 30 1954/'55; rapport van de leerplancommissie blz. 149-176. Op blz. 156, regel 11-15 vinden we:

Technische complicaties kunnen zo licht oorzaak zijn, dat inzicht in het wezenlijke van de methode de leerlingen onthouden blijft. **En om dat inzicht is het te doen.** *Voor automatische toepassing van niet begrepen rekenprocédé's is er op een school, die algemene vorming nastreeft, geen plaats.*

Ik ben het daarmee volkomen eens en ik denk, de meeste leraren ook. Er zullen er ook zijn, die de vraag stellen: „Komen die voor, die onbegrepen beweringen? Zijn er, die hun leerlingen het wezenlijke onthouden? Zo ja, geef dan maar eens een voorbeeld.''

Voorbeelden kan ik alleen ontlenen aan schoolboeken. Even dit eerst: ik hielp eens een jongen met de wortelvormen en gaf hem op: herleid $2\sqrt{\frac{1}{2}}$. Hij schreef op $\sqrt{4\frac{1}{2}}$. „Hoe kom je eraan?'', „Meneer zei: „het kwadraat van wat ervoor staat onder het wortelteken. Nou, het staat eronder''. Onbegrepen rekenprocédé, zie boven.

In de 5e klas V.H.M.O.: „poollijn van $(x_1; y_1)$ t.o. van de ellips $2x^2 + 3y^2 = 18$; vergelijking $2x_1x + 3y_1y = 18$. Meneer zegt: „*half invullen*; als je ziet x^2, zet dan x_1x; y^2 zet y_1y; x zet $\dfrac{x + x_1}{2}$; xy zet $\dfrac{x_1y + xy_1}{2}$. Zo krijg je de poollijn.'' (Geen verzinsel van mij, die woorden „half invullen''.)

Ik heb een vijftal schoolboeken over analytische meetkunde, uitgekomen na 1958, het jaar, waarin het nieuwe programma van kracht werd. Daaraan ontleen ik:

1. § 31. **De poollijn.**

Definitie: De poollijn van punt $P(x_1; y_1)$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ is de lijn $x_1x + y_1y = r^2$.

Omgekeerd heet $P(x_1; y_1)$ de pool van de lijn $x_1x + y_1y = r^2$ t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$.

2. § 23. Ligt $P(x_1; y_1)$ buiten de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$, dan kunnen we uit P twee raaklijnen aan de cirkel trekken; de verbindingslijn der raakpunten heet *raakkoorde* of *poollijn*(!) van P; P zelve heet de *pool* van de poollijn. Verder dezelfde afleiding van $x_1x + y_1y = r^2$ als bij 4.

3. § 22. Nadat in 20 regels $x_1x + y_1y = r^2$ voor de raaklijn in $(x_1; y_1)$ van de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ is afgeleid, wordt in § 23 de vraag gesteld: „hoeveel raaklijnen aan de cirkel getrokken gaan door een punt P buiten de cirkel?" Na een relaas van 37 regels wordt zowaar gevonden 2; tevens:

De vergelijking $x_1x + y_1y = r^2$ is de vergelijking van de rechte, die de raakpunten van deze raaklijnen verbindt.

Verder: men noemt de rechte $x_1x + y_1y = r^2$ de **poollijn** van $P(x_1; y_1)$.

4. § 23. *De poollijn van een punt t.o. van een cirkel.*

Het punt P ligt *niet* op de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ („niet op" moet zijn „buiten", gezien wat er volgt).

Is PA een raaklijn uit P en $A(p; q)$ het raakpunt, dan is de verg. van PA: $px + qy = r^2$ (§ 20). Deze lijn gaat door $P(x_1; y_1)$, dus $px_1 + qy_1 = r^2$; het raakpunt A ligt dus op de lijn $x_1x + y_1y = r^2$, omdat $x = p$ en $y = q$ aan deze verg. voldoen. (Lezer, ga dit eens goed na; even tekenen; de zaak is nl. hiermee niet af; een lijn is nu eenmaal niet bepaald door één punt!)

De schrijver vervolgt nochtans:

Deze lijn heet de **poollijn** van P t.o. van de cirkel; zij bevat de raakpunten van de raaklijnen uit P.

5. 17.

Vrijwel dezelfde gang als onder 4 en dan de

Definitie. *De rechte p met vergelijking $x_1x + y_1y = r^2$ heet de* **poollijn** *van het punt t.o.v. de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$.*

Het punt P heet de **pool** *van p t.o.v. de cirkel.*

Welke leerling komt eruit? De schrijvers van de boeken, waaraan de aanhalingen 2, 3, 4 en 5 zijn ontleend, vinden alle vier, dat de lijn door de raakpunten van de raaklijnen uit $P(x_1; y_1)$ tot vergelijking heeft $x_1x + y_1y = r^2$. Over de andere punten (ze hebben het slechts over twee punten van een lijn, nr 4 slechts over één) van de lijn wordt met geen woord gerept.

We laten het hierbij; het geval, dat P binnen de cirkel ligt, wordt nergens behoorlijk behandeld. Alle vijf onthouden de leerlingen het wezenlijke en geven niet meer dan de onbegrepen regel: „jongens,

als je ziet: poollijn van P t.o.v. $2x^2 + 3y^2 = 18$, zet dan $2x_1x + 3y_1y = 18$."

De lezer vraagt nu: „en hoe zou jij het dan doen?" Wel, dat laat ik hier volgen. Daarbij wordt gebruik gemaakt van:

1) Een lijn evenwijdig met de zijde AB van △ ABC verdeelt AC en BC in evenredige stukken.

2) De gerichte afstand van twee punten A en B op de x-as met abscissen x_A en x_B is $x_B - x_A$.

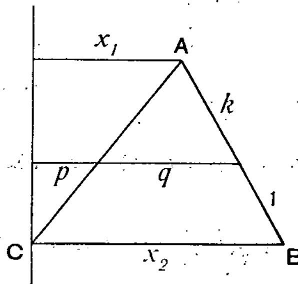


Fig. 1.

3) Heeft A de abscis x_1 en B de abscis x_2 en verdeelt P het lijnstuk AB in reden als $k : 1$, dan is de abscis van P $\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$. Dit is een bekend sommetje uit de vlakke meetkunde. Voor het bewijs gebruiken we wat hierboven onder 1) staat; zie fig. 1.

$$\begin{aligned} p : x_1 &= 1 : (1 + k) \\ q : x_2 &= k : (1 + k) \end{aligned} \quad \text{dus } p + q = x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}.$$

Mij dunkt, dat valt mee; het is wel eens goed, dat de leerlingen een toepassing zien van wat in de meetkundeles is geleerd.

Hier volgt dan mijn behandeling.

Zie fig. 2; gegeven zijn de punten A en B; op de lijn l door deze punten ligt het punt C zo, dat CA : CB = —2 is en het punt D zo, dat DA : DB = 2 is; met de volgorde van de letters, die een lijnstuk aanduiden, geven we de richting van het lijnstuk aan; vandaar —2 en 2.

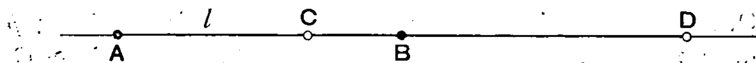


Fig. 2. C en D verdelen AB in- en uitwendig in dezelfde verhouding; k = 2.

In dit onderschrift staat „dezelfde"; we houden ons meestal aan het spraakgebruik: dezelfde; inwendig en uitwendig zeggen al het tegengestelde.

In de vlakke meetkunde maakten we reeds kennis met een verdeling als deze; de voetpunten van de binnen- en de buitendeellijn van een hoek van een driehoek verdelen de overstaande zijde in- en uitwendig in dezelfde verhouding; zie fig. 3.

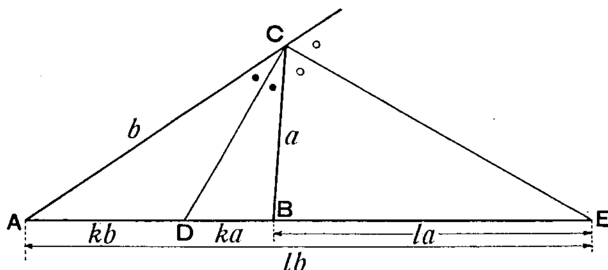


Fig. 3. —(DB : DA) = EB : EA.

Zie fig. 4a; A en B gegeven; P en Q op de lijn AB. $\frac{PA}{PB} = -\frac{m}{n}$, $\frac{QA}{QB} = \frac{m}{n}$; in fig. 4b $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ en $\frac{QA}{QB} = -\frac{m}{n}$.

Zoals men ziet, is de constructie van Q bij gegeven A, B en P al heel eenvoudig; doe het zelf na.

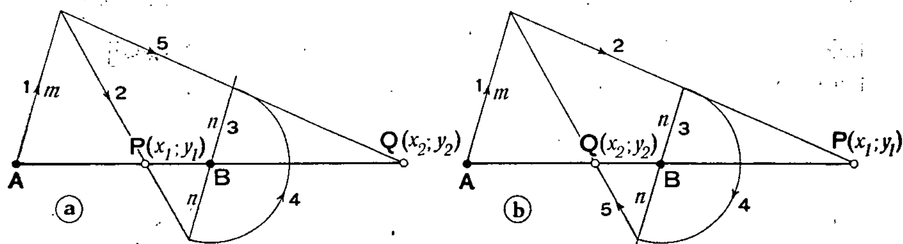


Fig. 4. Q harmonisch toegevoegd aan P t.o. van A en B.

Bepaling. **Gegeven de punten A en B op de lijn *l*; men zegt, dat de punten P en Q van *l* harmonisch toegevoegd zijn t.o.v. A en B, als PA: PB en QA: QB tegengestelde verhoudingen zijn.**

Zie fig. 5 met de cirkel *C* en het punt P er binnen. De lijnen l_1, l_2 en l_3 snijden de cirkel in A_1 en B_1, enz. Op elk van die lijnen bepalen we het aan P t.o. van de snijpunten harmonisch toegevoegde punt Q. De meetkundige plaats van de punten Q is de lijn *p*; *p* heet de **poollijn** van P en P de **pool** van *p* t.o. van de cirkel *C*.

Bepaling. **De poollijn van een punt P t.o. van een cirkel *C***

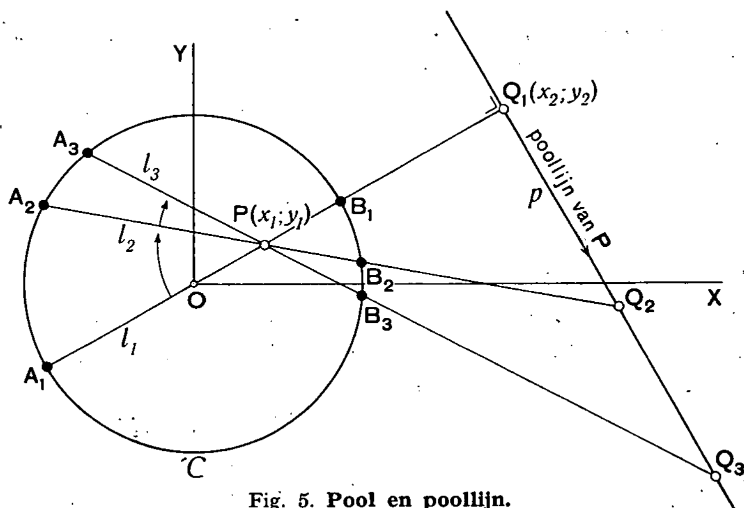


Fig. 5. **Pool en poollijn.**

is de meetkundige plaats van het punt Q, dat op elke lijn door P harmonisch toegevoegd is aan P t.o. van de snijpunten van *C* en die lijn.

We kunnen dit ook zo uitdrukken om de aard van de meetkundige plaats nog duidelijker te belichten:

Draait een lijn *l* om P, dan doorloopt de pool Q van *l* de lijn *p*, de poollijn van P t.o. van de cirkel *C*; (fig. 5) en omgekeerd:

Doorloopt een punt Q een lijn *p*, dan gaan de poollijnen *l* van Q t.o. van de cirkel *C* door één punt P, de pool van *p* t.o. van die cirkel; zie fig. 6.

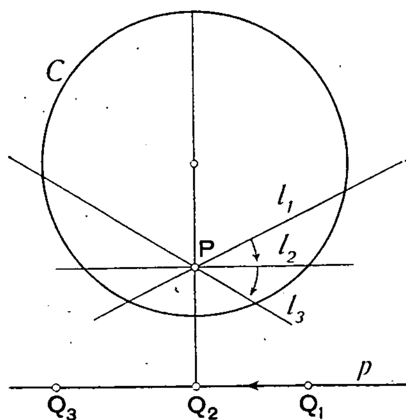


Fig. 6. *l* draait om P: de polen liggen op een rechte lijn *p*. Q doorloopt een rechte lijn *p*; de poollijnen van de punten Q_1, Q_2... draaien om P, de pool van *p*.

Er is reeds gezegd, dat de meetkundige plaats van Q een rechte lijn is; dit zullen we nu bewijzen.



Fig. 7. **P en Q harmonisch aan elkaar toegevoegd t.o. van A en B.**

Volgens de bepaling is PA : PB = —(QA : QB); van deze evenredigheid verwisselen we de binnentermen met het doel de coördinaten van A en B gemakkelijk uit te drukken in die van P en Q; we nemen dus PA : QA = —(PB : QB).

De abscissen van A, B, P en Q zijn opv. x_A, x_B, x_1 en x_2

$$\frac{PA}{QA} = \frac{x_A - x_1}{x_A - x_2} = k; \text{ in fig. 7 is dat } \frac{0 - 25}{0 - 100} = \frac{1}{4}; \qquad (1)$$

$$\frac{PB}{QB} = \frac{x_B - x_1}{x_B - x_2} = -k; \text{ in fig. 7 is dat } \frac{40 - 25}{40 - 100} = -\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

Uit (1) volgt $x_A = \dfrac{x_1 - kx_2}{1 - k}$; uit (2) $x_B = \dfrac{x_1 + kx_2}{1 + k}$.

Voor de ordinaten geldt dezelfde afleiding; we vinden dus, als in fig. 5 P het punt $(x_1; y_1)$ is en Q het punt $(x_2; y_2)$, op elk van de lijnen l_1, l_2 en l_3:

$$A\left(\frac{x_1 - kx_2}{1 - k}; \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}\right) \text{ en } B\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right). \qquad (3)$$

In fig. 5 hebben we drie koorden getekend door het punt P binnen de cirkel; op hun verlengden liggen de punten Q; op elke koorde is QA : QB een ander getal; op A_1B_1 2,7, op A_2B_2 2,2, op A_3B_3 1,7.

B ligt op de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$, dus is

$$\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right)^2 = r^2.$$

Uitgewerkt en gerangschikt naar de afdalende machten van k:

$$\begin{aligned} &\text{voor B: } k^2(x_2^2+y_2^2-r^2)+2k(x_1x_2+y_1y_2-r^2)+x_1^2+y_1^2-r^2=0 \\ &\text{voor A: } k^2\times \text{ idem } \quad -2k\times \text{ idem } \quad +\text{idem} \quad =0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Door aftrekking van de overeenkomstige leden van de vergelijkingen (4) vindt men $\quad 4k(x_1x_2 + y_1y_2 - r^2) = 0$;

$$\text{als } k \neq 0 \text{ is, dan is } x_1x_2 + y_1y_2 = r^2. \qquad (5)$$

Dit betekent, dat $Q(x_2; y_2)$ ligt op de lijn

$$x_1 x + y_1 y = r^2. \tag{6}$$

De lijn p met vergelijking $x_1\ x + y_1 y = r^2$ heet de poollijn van $P(x_1; y_1)$ t.o. van de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$.

Zie fig. 5; op deze figuur is de lijn OP de as van symmetrie; dus is de poollijn loodrecht op OP.

N.B. We hebben bij de afleiding van de vergelijking van de poollijn t.o. van de cirkel enkel gebruik gemaakt van het feit, dat de vergelijking van de cirkel van de tweede graad is; deze afleiding geldt dus ook voor de parabool, de ellips en de hyperbool, waarvan de vergelijkingen ook van de tweede graad zijn.

We vinden, de cirkel inbegrepen:

de cirkel $x^2 + y^2 = r^2$ poollijn $x_1\ x + y_1\ y = r^2$

de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ poollijn $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

de hyperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ poollijn $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

de hyperbool $xy = k^2$ of $xy + xy = 2k^2$ poollijn $x_1 y + xy_1 = 2k^2$

de parabool $y^2 = 2px$ of $y^2 = px + px$ poollijn $yy_1 = px + px_1$

de parabool $y = ax^2 + bx + c$ of $2y = 2ax^2 + 2bx + 2c$

poollijn $y + y_1 = 2axx_1 + bx + bx_1 + 2c$.

Ligt $P(x_1; y_1)$ op de cirkel, vallen dus A, P en B samen, dan zijn in de vergelijkingen (4) de bekende termen nul en heeft men, na deling door k:

$$\begin{aligned} k(x_2^2 + y_2^2 - r^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2 - r^2) &= 0 \\ k \times \text{ idem } \quad - 2 \times \text{ idem } &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Aftrekking geeft $4(x_1x_2 + y_1y_2 - r^2) = 0$, dus weer

$$x_1x_2 + y_1y_2 - r^2 = 0 \tag{5}$$

Dit betekent, dat $Q(x_2; y_2)$ ook nu ligt op de lijn

$$x_1 x + y_1 y = r^2 \tag{6}$$

Dit is de poollijn van $P(x_1; y_1)$ t.o. van de cirkel, tevens raaklijn in P (wegens het samenvallen van A en B), dus:

Als P op de cirkel ligt, dan is de poollijn van $P(x_1; y_1)$ dezelfde als de raaklijn in P.

We merken nog op, dat uit

$$x_1x_2 + y_1y_2 = r^2 \tag{5}$$

niet alleen volgt, dat de lijn $x_1 x + y_1 y = r^2$ door $Q(x_2; y_2)$ gaat,

maar ook, dat de lijn $x_2x + y_2y = r^2$ door P $(x_1; y_1)$ gaat; onder woorden:

De poollijn van een punt P is de verzameling van de polen van lijnen door P (zie fig. 5).

Fig. 8. **De poollijn van B is de raaklijn** t.

Ook op de volgende wijze kunnen wij ons ervan overtuigen, dat de raaklijn in een punt P van een cirkel de poollijn is van P t.o. van die cirkel.

Zie fig. 8; de poollijn van $P(x_1; 0)$ is de lijn $x_1x + 0 . y = r^2$, dus $OQ = \frac{r^2}{x_1}$ en $QB = \frac{r^2}{x_1} - r$; $PB = r - x_1$; als we x_1 laten toenemen tot r (P naar rechts), dan worden QB en PB beide nul; dat is: P en Q vallen in B; de poollijn p gaat daarbij over in de raaklijn t.

We zijn begonnen met fig. 5, waarin P binnen de cirkel ligt; dit is het eenvoudigste geval, omdat alle lijnen door P de cirkel snijden.

Neemt men P buiten de cirkel, zoals in fig. 9, dan heeft men lijnen tussen t_1 en t_2, die de cirkel snijden, t_1 en t_2, die hem raken, en lijnen als l, die de cirkel niet snijden. Van de eerste soort hoeven we alleen maar te zeggen, dat het geval een herhaling is van alles, wat bij fig. 5 is gezegd; tot de poollijn van P behoort dus alvast het lijnstuk CD zonder de eindpunten. Op twee manieren hebben we verder aangetoond, dat C en D er ook toe behoren.

Nu moeten we ons nog bezighouden met lijnen als l in fig. 9, die geheel buiten de cirkel liggen.

In fig. 9 is de vergelijking van l $x - y = 6$ en die van C $x^2 + y^2 = 9$; de coördinaten van de „snijpunten" vindt men dus

uit $x^2 + (x - 6)^2 = 9$ of $2x^2 - 12x + 27 = 0$ en
$(y + 6)^2 + y^2 = 9$ of $2y^2 + 12y + 27 = 0$.

Deze vergelijkingen hebben echter geen reële wortels en wat we ons moeten voorstellen onder punten, waarvan de coördinaten niet reëel zijn, weten we niet.

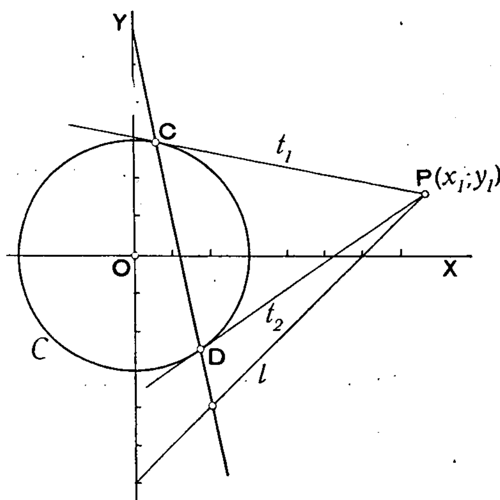


Fig. 9. *l* **buiten de cirkel.**

Of de coördinaten (3) van A en B echter reëel zijn of niet, we vinden steeds het stelsel (4), waaruit wegens $k \neq 0$ volgt
$x_1x_2 + y_1y_2 = r^2 \ldots (5)$.

We kunnen dus ook van een punt $Q(x_2; y_2)$ op een der verlengden van CD zeggen, dat het harmonisch toegevoegd is aan $P(x_1; y_1)$ t.o. van de „snijpunten" van PQ en *C*.

Tot slot dit: vier van de vijf schrijvers, wier boeken de aanhalingen aan het begin hebben geleverd, verkondigen, dat de lijn CD van fig. 9 poollijn heet, zonder ook maar iets te zeggen van de betekenis van andere punten dan C en D. Herlees de aanhef van dit artikel.

Zie EUCLIDES jg. 35 1959/'60, het artikel van de inspecteurs dr. Gribnau en dr. Van der Neut, blz. 25:

Vraag: Behoort de poollijn tot de leerstof?

Antwoord: **Van de poollijn dient het begrip en de vergelijking behandeld te worden,** echter niet als uitgangspunt van een nieuw hoofdstuk.

NASCHRIFT.

Over harmonische ligging zie Molenbroek-Wijdenes Leerboek der vlakke meetkunde 12e druk, hoofdstuk XIX: Dubbelverhouding; harmonische ligging; pool en poollijn blz. 420—461; 47 fig.; 24 vraagstukken.

Wijdenes Vlakke meetkunde voor voortgezette studie 2e druk, hoofdstuk XVI Harmonische ligging, blz. 271—283; 21 fig.; 10 vraagstukken.

Zie ook Wijdenes Lagere Algebra II 7e druk § 89, 90 blz. 333—337 Harmonische reeksen.

Wijdenes en Van de Vliet Algebra en financiële rekenkunde voor de H.B.S. A, 9e druk § 28, 29 blz. 37—40 Harmonische reeksen (toepassingen in het bankverkeer in vreemde valuta).

Het volgende uit het boek *Analytische meetkunde van de kegelsneden en de oppervlakken van de tweede graad* van Prof. Dr G. Schouten (hoogleraar in Delft) 3e druk 1905.

Oorsprong van de naam harmonisch.

Omdat het aantal trillingen van een gespannen snaar omgekeerd evenredig is met haar lengte, zullen drie snaren van dezelfde stof en dezelfde dikte en dezelfde spanning, waarvan de lengten harmonisch evenredig zijn, tonen geven, waarvan de aantallen trillingen rekenkundig evenredig zijn. Wordt die rekenkundige verhouding in gehele getallen uitgedrukt, dan zullen drieklanken, geboren uit het gelijktijdig aanslaan van de drie snaren, een consonant of harmonische drieklank vormen als die getallen niet te ver in de natuurlijke rij der getallen staan. Vandaar de naam van harmonisch evenredige lijnstukken of getallen. De reeks $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ heet dan ook bij voorkeur de *harmonische reeks*, hoewel elke reeks, waarvan de termen de omgekeerden zijn van die van een rekenkundige reeks b.v. $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+v}, \frac{1}{a+2v} \ldots$ een harmonische reeks is.

ONTVANGEN BOEKEN

Dr. W. J. Bos en Drs. P. E. Lepoeter, *Wegwijzer in de Meetkunde 3*, 6e druk J. M. Meulenhoff, Amsterdam 1962, 152 blz, f 5,90.

Deze druk is gelijk aan de vorige.

Dr. J. G. Rutgers, *Centrale Projectie*, 2e druk van een hoofdstuk uit het Leerboek der Beschrijvende Meetkunde II[1], P. Noordhoff N.V., Groningen, 50 blz., 55 vraagstukken, f 2.50.

DE AMERIKAANSE TEST

Verleden jaar is door een vrij groot aantal scholieren deelgenomen aan een test, die afkomstig was van de Mathematical Association of America en de Society of Actuaries [1]). De Amerikanen zullen het op prijs stellen, als we ook dit jaar en het komende jaar deze test aan Nederlandse leerlingen geven om onze resultaten met de hunne te kunnen vergelijken. Daar gebleken is, dat velen de test met plezier gegeven hebben, hoewel kritiek natuurlijk zeer goed mogelijk bleek, heb ik beloofd opnieuw te vragen, wie de test toegezonden wil hebben. Hij is bestemd voor leerlingen van de klassen 4 en 5 van de h.b.s.-B en van de klassen 5 en 6 van het gymnasium-B. Ik heb verzocht een exemplaar van de test per luchtpost te mogen ontvangen, waardoor ik u de opgaven vroeger dan verleden jaar hoop te kunnen sturen.

Mag ik voor 20 februari van u bericht ontvangen, als u uw leerlingen aan de test wil doen deelnemen? Graag met vermelding van het benodigde aantal exemplaren. Het is alleen mogelijk volledige klassen aan de test te doen deelnemen.
Voor de docenten zal ik enige exemplaren van de Engelse tekst bijvoegen.

Verleden jaar is mij na afloop gebleken, dat een vrij groot tekort door mijn eigen school gedragen moest worden. Daarom zou ik dit jaar de vergoeding graag op 13 cent per exemplaar stellen.

P. G. J. Vredenduin
Kneppelhoutweg 12
Oosterbeek

[1]) Zie Euclides **37** (1961—62), p. 286, en **38** (1962—63) p. 25.

BOEKBESPREKING

Drs. J. Muilwijk, *Inleiding tot de wiskundige statistiek*, eerste deel, Grondslagen. Hoofddirectie financiële en economische zaken, Centrale afdeling Statistiek, 's-Gravenhage, 1961, 193 blz., *f* 11,75.

Het boek is in de eerste plaats bestemd voor de opleiding tot technisch ambtenaar bij de P.T.T. Dit wil echter geenszins zeggen, dat het voor anderen van geen waarde zou zijn. De voorbeelden zijn gekozen uit het bedrijf van de P.T.T., maar dat is dan ook het enige facet van het boek, waaruit gerichtheid op P.T.T.-opleiding blijkt. Wel is het boek kennelijk geschreven voor hen, die de statistiek in de praktijk moeten gebruiken. Dit neemt niet weg, dat de schrijver van oordeel blijkt, dat een noodzakelijke voorwaarde voor het toepassen van statistische methoden is, dat men terdege begrijpt, wat men doet. In het boek is er dan ook naar gestreefd de betekenis van de behandelde begrippen en methoden helder uiteen te zetten, terwijl anderzijds de schrijver zich steeds voor ogen houdt, dat hij niet voor een mathematisch geschoold publiek schrijft en zijn terminologie aanpast aan het begripsvermogen van de gebruikers.

Over de inhoud van het boek kan ik kort zijn. Veel traditionele stof is erin behandeld: eerst een menigte begrippen uit de beschrijvende statistiek, daarna de kansrekening (waarvan de fundering naar mijn smaak iets te theoretisch gehouden is), en ten slotte enkele statistische methoden.

In deel II, waarvan de herdruk nog niet verschenen is, zullen toepassingen behandeld worden.

Deel III, 50 blz., (*f* 4,60) bevat tabellen. Deze tabellen zijn deels van wiskundige aard en hebben deels betrekking op verschillende statistische verdelingen.

P. G. J. Vredenduin

Evert W. Beth, *Formal Methods, An Introduction to Symbolic Logic and to the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht 1962, XIV+170 blz., geb. *f* 23,50 (Synthese Library).

In Euclides, 34e jaargang (1958—59), blz. 257—266 komt een artikel voor van Beth over Moderne Logica. Wie zich een indruk wil vormen van de wijze, waarop de schrijver in het gerecenseerde werk een inleiding in de symbolische logica geeft, doet verstandig dit artikel nog eens na te slaan. Hij kan dan beoordelen, of hij gestimuleerd wordt het boek te kopen of niet. Naar mijn mening is het een uitstekende inleiding in de logica, die weliswaar geen voorkennis onderstelt, maar toch ervan uitgaat, dat de lezer zich met de logische problemen vaker beziggehouden heeft en nu zijn inzicht wenst te verdiepen.

In het eerste hoofdstuk wordt de propositielogica behandeld, die als enige operatie de implicatie heeft. Hierin treden dus geen andere formules op dan $A \rightarrow B$, $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, e.d. Nu wordt op drie verschillende manieren de logica ontwikkeld,

t.w. op axiomatische manier en op twee verschillende manieren door middel van tableaus. De ene manier is de manier, die ook in bovengenoemd artikel is uiteengezet. We trachten het oordeel, dat onderzocht wordt, te weerleggen. Om b.v. A→B te weerleggen, moet A waar en B fout zijn. Zo doorgaande vindt men uiteindelijk of een weerlegging mogelijk is of niet. Deze methode blijkt, zoals te verwachten was, overeen te stemmen met de axiomatische fundering van de tweewaardige logica. De andere manier, waarop van tableaus gebruik gemaakt wordt, berust daarop, dat men op natuurlijke wijze het deductieproces tracht te reproduceren. Wil men A→B bewijzen, dan rangschikt men A onder de premissen en B onder de conclusies. Beide methoden blijken formeel veel overeenkomst te vertonen, maar toch niet geheel dezelfde resultaten te leveren. Op de tweede methode kunnen minder proposities afgeleid worden dan op de eerste. Verrassend is, dat op de tweede manier juist de intuïtionistische logica blijkt op te treden.

Nu volgt de invoering van andere operaties, zoals $\vee$ (of), $\wedge$ (en), $\overline{}$ (niet). Door handig te manoeuvreren kan men volstaan met de methoden van het bovengenoemde logische systeem. Principieel nieuwe gezichtspunten treden op, zodra de kwantoren (x) (alle) en (Ex) (er is een) behandeld worden. De tableaus kunnen nu niet alleen gebruikt worden voor het bewijzen van een propositie, maar ook voor het construeren van een model, dat als tegenvoorbeeld dient. Verschillende fundamentele theorema's over de logica kunnen nu op handige manier bewezen worden.

Hierna volgt nog een bespreking van de theorie van Gödel, die met grote bekwaamheid geschreven is; een hoofdstuk over de theorie van het definiëren, waarin wordt besproken de mogelijkheid grondbegrippen te vervangen door gedefinieerde begrippen; en een hoofdstuk over het bewijzen van stellingen door middel van machines. Om het hoofddeel van het boek niet te veel te belasten, heeft de auteur verschillende bewijzen, die veel ruimte in beslag namen, in appendices ondergebracht, hetgeen de leesbaarheid van het boek zonder twijfel gemakkelijker heeft gemaakt.

Een voortreffelijk boek voor hen, die geen volkomen leek op dit terrein meer zijn.

P. G. J. Vredenduin

E. Stiefel, *Einführung in die numerische Mathematik*, (Bd. 2 van de Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik), B. G. Teubner, Stuttgart, 1961, 234 blz., 36 fig. Prijs DM 24,80.

Voor hen, die zich de grondbeginselen van de numerieke wiskunde willen eigen maken, vormt dit boek een bijzonder geschikte inleiding. Hoewel er reeds een groot aantal boeken op dit gebied zijn verschenen, munt het onderhavige boek uit, enerzijds door een grote originaliteit en anderzijds doordat de behandelde methoden, meer dan in andere boeken het geval is, zijn aangepast aan de eisen van elektronische rekenmachines. Hierbij komt het er vaak meer op aan over methoden te beschikken, die in een groot aantal gevallen toegepast kunnen worden, dan om voor ieder afzonderlijk geval de optimale methode te gaan toepassen. De algemene methoden zijn ook voor het begrip belangrijker en zijn dus zeer op hun plaats in een inleiding.

De eerste drie hoofdstukken zijn gewijd aan lineaire problemen. Als algemeen kenmerk hiervan heeft men dat de exacte oplossing na een eindig aantal stappen kan worden gevonden. Dit is bv. het geval in het eerste hoofdstuk bij problemen uit

de lineaire algebraïsche vergelijkingen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de zg. uitwisselingsmethode, welke in feite niets anders is dan wat ook bij de methode van Gauss wordt toegepast, maar waarbij de volgorde waarin de onbekenden worden geëlimineerd, systematisch kan worden gekozen, waardoor afrondingsfouten minder invloed zullen hebben.

Het tweede hoofdstuk gaat over lineaire programmering, waarbij het probleem is een lineaire functie van een aantal variabelen maximaal (of minimaal) te maken, terwijl er een aantal nevenvoorwaarden gegeven is en wel in de vorm dat andere lineaire combinaties van de variabelen kleiner of groter dan een bepaalde waarde moeten blijven. Ook dit vraagstuk kan met behulp van de uitwisselingsmethode worden opgelost. Het vinden van die oplossing van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden ($m > n$), waarvoor de grootste afwijking die in één der verg. optreedt zo klein mogelijk is (benadering in de zin van Tschebyschef) is een probleem van lineaire programmering.

In het derde hoofdstuk wordt de beste oplossing van m lineaire vergelijkingen met n onbekenden bepaald in de zin van de kleinste kwadraten. Er worden dan normaalvergelijkingen opgesteld. Het vinden van de oplossingen hiervan is identiek met het bepalen van het minimum van een kwadratische vorm.

In hoofdstuk 4 wordt begonnen met de niet-lineaire algebra. Hierbij wordt behandeld het vinden van wortels van vergelijkingen van het type $f(x) = 0$. Dit geschiedt met een iteratiemethode, die echter nooit de exacte oplossing levert maar deze wel willekeurig dicht benadert. Een aardige methode wordt gegeven voor het berekenen van de waarde van een polynoom voor een complexe waarde van de variabele.

In hoofdstuk 5 worden eigenwaarde problemen van lineaire vergelijkingen behandeld. Recensent vindt dit het minst geslaagde hoofdstuk uit het gehele boek. De normale iteratiemethode komt slecht uit de verf.

Hoofdstuk 6 handelt over differentiaalvergelijkingen, maar begint met numerieke differentiatie en integratie. Bij de integratie wordt aangetoond hoe men door halvering van de integratiestap een tabel kan opstellen, waarvan de waarden naar de exacte waarde van de integraal convergeren, mits de integrant continu is. Deze tabel bevat dan uitkomsten met trapeziumregel, Simpson-regel en hogere integratieregels. Voor de differentiaalvergelijkingen worden zowel methoden gegeven voor gewone (Runge-Kutta, Heun en Adams) als voor partiële vergelijkingen. Aan de kwestie van stabiliteit wordt op duidelijke wijze aandacht besteed. Van de partiële differentiaalvergelijkingen worden alleen elliptische en parabolische vergelijkingen van de 2de orde behandeld.

Tenslotte wordt in het laatste hoofdstuk iets over approximatietheorie behandeld. Hier komen ook de gebruikelijke interpolaformules van Lagrange, Newton en anderen naar voren. De voordelen van een benadering met Tschebyscheffpolynomen worden duidelijk gemaakt. Door de benaderingstheorie uit te breiden op een functie, die voor een aantal equidistante punten op de eenheidscirkel in het complexe vlak is gegeven, komt men op elegante wijze tot een methode voor het vinden van de Fouriercoëfficiënten van een periodieke functie.

Al met al moet dit boek als een belangrijke aanwinst van de literatuur worden beschouwd. De vereiste voorkennis gaat niet uit boven die van de eerstejaarscolleges, behalve dat het voor het hoofdstuk over differentiaalvergelijkingen nuttig is ook iets over de theorie van de vergelijkingen te weten. Het boek kan daarom aan een grote groep van lezers warm worden aanbevolen.

A. I. van de Vooren.

Dr. R. Broeckx, *Algebra I, Hogere cyclus*; 342 blz., De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen 1961.

Het boek is bestemd voor de derde klasse van de afdelingen Wetenschappen, Latijn-Wiskunde en Latijn-Wetenschappen, evenals voor de derde en tweede klassen van de Grieks-Latijnse en Economische afdelingen.

Het boek behandelt na een herhaling van de leerstof uit de lagere klassen in hoofdzaak de algebra van onze derde klasse HBS. De schrijfwijze is duidelijk en overzichtelijk en de behandeling lijkt sterk op die in onze boeken. Een enkele opmerking: na de behandeling van de vergelijking $ax+by=c$ volgt een hoofdstuk dat de titel draagt: ,,Grafische voorstellingen van de vergelijking $ax+by=c$". Bij het oplossen van vergelijkingen wordt ook even het begrip determinant genoemd en de regel van Cramer. Bij de grafiek van de kwadratische functie wordt de top bepaald door translatie van het assenstelsel. Er is dus een ineenvloeien van grafieken en analytische meetkunde.

P. Bronkhorst

A. Permentier en L. Verlinden, *Rekenkunde, algebra, meetkunde II*, 544 blz., Deel voor de vijfde klas; De Nederlandse Boekhandel, Antwerpen, 1961.

De rekenkunde wordt in 2 gedeelten behandeld; eerst de hoofdeigenschappen met nog al veel stellingen en daarna vraagstukken over mengsels, intrestrekeningen, fietsers en wandelaars, zoals bij ons in de hoogste klassen van de lagere school worden gegeven. Het deel algebra behandelt een gedeelte van de stof van onze eerste klassen, nl. tot en met merkwaardige produkten. De behandeling geeft geen aanleiding tot opmerkingen, daar alles op de ons bekende wijze gebeurt. In het deel meetkunde worden na een vrij uitvoerige inleiding de congruentie-kenmerken, zhz, hzh en zzz ingevoerd. Daarna aparte kenmerken voor de rechthoekige driehoek: (hyp.h), wat betekent hypotenusa en een scherpe hoek; het ,,bewijs" gaat met verschuiving. Eerst daarna komen de eigenschappen van evenwijdige lijnen, gesneden door een derde aan de orde. De congruentiekenmerken zhh en zzh worden niet genoemd. Er is voor dit alles wel wat te zeggen; het is immers vaak flauw om onderscheid te maken tussen hzh en zhh, als eenmaal bewezen is, dat de som van de hoeken van een driehoek 180 graden is, terwijl het geval zzh toch eigenlijk alleen zin heeft in het geval van de rechthoekige driehoek. Op de volgende definitie wil ik nog even de aandacht vestigen:
,,Een meetkundige plaats is de figuur, gevormd door de verzameling van al de punten — en slechts die — welke een bepaalde eigenschap bezitten". Bij onze nieuwe nomenclatuur komt de ,,figuur" niet tot zijn recht. Als men spreekt van de verzameling van de gehele getallen, dan zijn we met deze definitie klaar; als we spreken van de verzameling van de punten, die op gelijke afstand liggen van 2 gegeven punten, zijn we niet klaar. Hoe weet een leerling nu of hij ,,klaar" is?

Alles bij elkaar bevat dit deel de stof voor onze eerste klassen.

P. Bronkborst

W. J. Brandenburg en L. Schrier; *Inleiding in de meetkunde 2;* Groningen, J. B. Wolters 1962, *f* 3,25 (ing.).

Het eerste deeltje van deze inleiding werd reeds eerder besproken. Ook de uitvoering van dit deeltje is weer keurig. Het bevat de stof voor de tweede klas. Persoonlijk zou ik hoofdstuk II liever in deel 1 verwerkt hebben gezien.

De inhoud van dit deeltje bevalt me beter dan die van het eerste. Het hoofdstuk over „omkeerbaarheid" heeft veel goeds en is instructief.

Een paar vragen. Worden bij de opgaven bij „Doorsneden van verzamelingen" alleen existentiebewijzen gevraagd of ook constructies?

Waarom worden geen bewijzen gegeven bij de verschillende gevallen van gelijkvormigheid? Bij steekproeven bleek me dat de bewerking zorgvuldig is geweest.

J. F. Hufferman

J. C. Kok e.a. *Differentiaal en Integraalrekening voor het V.H.M.O.*, Groningen, P. Noordhoff N.V. (ing. *ƒ* 4,40; geb. *ƒ* 4,90)

Het voorwoord van dit werkje is behalve door de reeds vermelde auteur nog ondertekend door M. ter Haar; C. A. H. van Vliet; N. Jongschaap en drs. H. Schuil.

Het boekje ziet er goed uit. Om er een gegrond oordeel over te geven zou je het in je lessen beproefd moeten hebben. Daar ik thans die gelegenheid niet heb, heb ik het goed doorgelezen.

De stof is m.i. duidelijk behandeld. Al zijn de definities vet gedrukt, toch had ik nog wel meer differentiatie in lettertype gewild. Een samenvatting van verschillende definities en stellingen aan het slot zou m.i. de bruikbaarheid hebben verhoogd.

Het boek bevat een uitgebreide verzameling vraagstukken; een hoofdstuk toepassingen in natuurkunde en mechanica en een bladzijde uit de geschiedenis van de infinitesimaalrekening. Dit laatste is wel heel weinig en had daarom ook wel gemist kunnen worden. Vermelding van de historie heeft alleen waarde, wanneer het inzicht in de huidige stand van zaken er door verhelderd wordt. Als mededeling van een rijtje namen heeft het geen zin.

Gestreefd is naar een voor het V.H.M.O. voldoende strengheid.

J. F. Hufferman

Prof. dr. Werner Burau; *Algebraische Kurven und Flächen.* Bd. I. Algebraische Kurven der Ebene. Sammlung Göschen 435.

De stof wordt in dit boekje op klassieke wijze behandeld. In hoofdstuk I komen aan de orde: rechten, kegelsneden en de krommen van de derde graad en de derde klasse; de kromme van Hesse. Het tweede hoofdstuk geeft uitbreiding tot een algemene theorie; de formules van Plücker; reeksontwikkeling van Puiseux voor de takken; iets over rationale krommen (vooral van de vierde graad) en een voorbeeld van een Cremonatransformatie. Uiteraard geeft het slechts een inleiding, maar het doet dit op heldere wijze. Voor belangstellenden aanbevolen.

J. F. Hufferman

J. Gy. Obdovics, *Taschenbuch der Elementar-Mathematik*, mit praktischen Anwendungen. Terba-Budapest 1962, 868 blz.

Het boekje is samengesteld uit twee delen van resp. drie en zes hoofdstukken, verenigd in een band.

Het eerste deel (556 blz.) geeft korte samenvattingen van de middelbare schoolwiskunde, te weten: 61 blz. rekenkunde, 183 blz. algebra (waarbij het oplossen van twee vergelijkingen met twee onbekenden, en ook drie met drie, wordt besproken m.b.v. determinanten). Ook volledige inductie en de beginselen van de waarschijn-

lijkheidsrekening zijn opgenomen. De planimetrie vraagt dan 89 blz.; de stereometrie 34, de trigonometrie, inclusief de sferische, 94 blz. De analytische meetkunde van het platte vlak en de ruimte resp. 78 en 30 blz.

Men vindt hier dus hoofdzakelijk technische gegevens. Grafieken ontbreken.

Het tweede deel behandelt dan in 34 blz. vektoralgebra. Complexe getallen, functiebegrip, differentiaal- en integraalrekening en oplossingsmethoden van differentiaalvergelijkingen vragen dan nog 230 blz.

Het gehele boekje, 17 bij 12 bij 5, weegt 750 gram. Geen van mijn colbertcostuums heeft een voldoend versterkte zak van voldoende afmetingen om dit boekje te bevatten. Men sleept m.i. altijd minstens 300 blz. teveel mee. Iemand die de congruentie van driehoeken nog eens wil naslaan, zal geen behoefte gevoelen na te gaan hoe een differentiaalvergelijking van het type Ricatti moet worden opgelost en omgekeerd.

Toch heeft dit boek in Hongarije in een behoefte voorzien. De eerste druk verscheen in 1957, in het voorjaar van 1960 de tweede en in 1962 de derde druk, waarbij naast de Hongaarse editie, ook een Duitse verscheen.

Burgers

Prof. Dr. E. Kampe, *Mengenlehre*. Sammlung Göschen, Band 999/999a. 4e verbeterde druk, 194 blz., prijs DM 5,80.

Wie zich in deze degelijke materie, die ons waarlijk keurig verzorgd wordt aangeboden, wil verdiepen leze ter inleiding toch vooral E.N.S.I.E. dl. IV blz. 28 en 29 (op pag. 33 wordt verwezen naar de auteur) of hij neme ter hand het eerste deel van de elementaire wiskunde van Felix Klein.

Okken

Prof. Dr. Wolfgang Haack, *Darstellende Geometrie* II. Körper mit krummen Begrenzungsflächen, cotierte Projectionen. Sammlung Göschen 143. 130 blz., prijs DM 3,60.

Of dit overigens keurig boekje veel aftrek zal vinden, waag ik te betwijfelen.

Okken

Raymond A. Struble, *Nonlinear Differential Equations*. McGraw-Hill, London, 1961, 58 s, 262 blz.

De schrijver deelt in het voorwoord mee, dat dit boek geschreven is vooral met het oog op de behoeften van beoefenaars der toegepaste wiskunde, ingenieurs en fysici, maar dat niet om het denkbeeld te doen postvatten, dat het niets anders dan een wiskundeboek is. Wie wil nagaan in hoeverre dat ook uit de tekst blijkt, dient wel te bedenken, dat heelwat, dat men nog niet zo lang geleden zonder aarzelen zuivere wiskunde zou genoemd hebben tegenwoordig (zowel bij ons als in de Verenigde Staten) tot het arsenaal der toegepaste wiskunde gerekend wordt te behoren. Zo nemen in dit boek existentie- en eenduidigheidsstellingen een belangrijke plaats in.

Het eerste hoofdstuk, voorbereidende beschouwingen, is er in de eerste plaats op gericht, de lezer vertrouwd te maken met het schrijven van een differentiaalvergelijking of een stelsel dergelijke vergelijkingen als een vectorvergelijking (n-dimensionaal) eventueel met behulp van matrices. Dat wordt eerst toegelicht

aan een zeer eenvoudige lineaire vergelijking van de tweede orde. Ook verder worden telkens lineaire vergelijkingen gebruikt als voorbeeld of ter voorbereiding, wat, dunkt mij, uit didactisch oogpunt aanbeveling verdient. Verder wordt in dit hoofdstuk de gehele lineaire transformatie besproken. In de volgende hoofdstukken worden na de reeds genoemde existentie- en eenduidigheidsstellingen met Cauchy-Lipschitz voorwaarden, maar ook met Cauchy-Peano voorwaarden, continuïteitskwesties betreffende de oplossingen besproken. Verder wordt veel aandacht besteed aan periodieke oplossingen en aan afwijkingen van de periodiciteit ten gevolge van het optreden van niet lineaire termen. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan de stabiliteit der oplossing, waarbij de schrijver onderscheidt stabiliteit volgens Laplace, volgens Liapounov en volgens Poincaré. De behandeling der laatste voert dan tot asymptotische ontwikkelingen. In het laatste hoofdstuk worden deze mee in het algemeen behandeld. Daarbij worden als voorbeeld de vergelijking van Mathieu en de vergelijking van Van der Pol aangevoerd, waarbij van de vectornotatie is afgezien, wat vele gebruikers aangenaam zal zijn.

In elk der acht hoofdstukken vindt de gebruiker een groot aantal vraagstukken, die als toepassing van de tekst en ter vergelijking met de tekst de waarde als studieboek belangrijk verhogen. Het is studerenden aan te raden, die alle door te werken, al zal de studie daardoor wel nogal wat tijd en inspanning kosten.

H. Bremekamp

M. M. Postnikov, *Fundamentals of Galois Theory*. Uit het Russisch vertaald Leo F. Born met medewerking van Robert A. Moore. (Noordhoff 1962).

Het boek was bestemd voor studenten van de tweede of derde cursus aan de universiteiten in Soviet Rusland. De schrijver is zich klaarblijkelijk bewust, dat het onderwerp, doordat het zo abstract is voor studenten in dit stadium van hun ontwikkeling moeilijk is. Hij neemt aan, dat de lezer enige kennis heeft van moderne algebra, maar, en dat in afwijking van de gewone behandeling, dat de moeilijkere hoofdstukken van dat vak, die hij trouwens ook niet gebruikt, niet zijn voorafgegaan.

Van de groepentheorie behandelt hij in het boek zelf wat nodig is voor de algemene theorie van Galois en haar toepassing op de theorie van de oplossing van hogeremachtsvergelijkingen met behulp van wortelvormen.

Waar hij overigens een beroep doet op kennis van moderne algebra verwijst hij naar het Russische werk van Kuresh, dat ook in het Engels vertaald is, naar het ook bij ons welbekende boek van Berkhoff - Mac Lane en naar Van der Waerden.

Het eerste hoofdstuk bevat de elementaire theorie der lichamen. De schrijver beperkt zich tot lichamen van de karakteristiek 0 en praktisch tot getallenlichamen, hoewel hij enkele woorden wijdt aan de uitbreiding tot andere lichamen.

De uitbreidingen van een getallenlichaam worden zeer zorgvuldig besproken.

Dan volgt, wat voor het volgende nodig is van de groepentheorie, ondergroepen, normaaldelers, factorgroepen, homomorfe afbeelding.

In het derde hoofdstuk de Galoistheorie, de definitie ontbindingslichaam en van normale uitbreiding van een lichaam, automorfisme van lichamen, definitie van de Galoisgroep, beschouwingen over geconjugeerde elementen.

Het tweede deel van het boek behandelt de theorie van het oplossen van vergelijkingen met behulp van wortelvormen, natuurlijk culminerend in het bewijs van

de stelling, dat voor een vergelijking van de vijfde of hogere graad een zodanige oplossing in het algemeen niet mogelijk is.

Het zal misschien merkwaardig aandoen, dat in de allerlaatste paragraaf pas de oplossing van de vierkantsvergelijking en van de derde machtsvergelijking behandeld wordt, maar dan met Galoistheorie.

Overal in het boek komen enkele vraagstukken voor, maar die zijn meest vrij triviaal. De schrijver meent, dat het oplossen van vraagstukken in een afzonderlijke cursus moet geleerd worden.

Het boek bevat voorin een reproduktie van een met potlood getekend portret van Galois.

H. Bremekamp

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, de Houtmanstraat 37, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie "*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*" in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op dinsdag 19 februari 1963:

Prof. Dr. A. van der Sluis: "Het benaderd bepalen van nulpunten van functies". Aanvang 20,00 uur.

WISKUNDE WERKGROEP van de W.V.O.

16 februari: Maandelijkse bijeenkomst van de Werkgroep in het Mathematisch Instituut, Boothstraat 17, Utrecht, van 3 uur tot circa 5.30 uur. Dr. P. G. J. Vredenduin spreekt over: „Transformaties in de onderbouw."

2 maart: Zelfde plaats, zelfde tijd. W. J. Brandenburg spreekt over: „Een proef met vectorrekening en verzamelingsleer in de tweede klasse van het Heymanslyceum te Groningen."

Voor deze bijeenkomsten wordt door het departement reiskostenvergoeding verleend aan rectoren, directeuren en docenten v.h.m.o. en kweekschool, voor de totaal in een jaar gemaakte reiskosten, na aftrek van ƒ 2.50 per persoon.

Zij, die lid van de Wiskunde Werkgroep willen worden, kunnen zich opgeven bij de secretaris-penningmeester, de heer H. C. Vernout, Van Nouhuysstraat 11, Haarlem, tel. 02500—57288. De contributie bedraagt ƒ 5.— voor 't kalenderjaar 1963, (W.V.O.leden betalen slechts ƒ 4.—) te voldoen op giro 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde Werkgroep te Haarlem. Men ontvangt dan maandelijks het Mededelingenblad, terwijl men tegen gereduceerde prijs kan deelnemen aan de jaarlijkse najaarsconferentie, welke in een weekend, meestal half november wordt gehouden. Bovendien kan men tegen ledenprijs diverse brochures verkrijgen, welke door de Werkgroep worden uitgegeven.

De secretaris-penningmeester verschaft gaarne alle nadere inlichtingen.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

81. Drie steden A, B en C worden verbonden door wegen AP, BP en CP, welke resp. r, s en t dollar per mijl kosten. Bepaal de plaats van P zodanig, dat de kosten minimaal zijn. (A, B en C zijn niet collineair.) (Uit Amer. Math. Monthly.)

82. In *R. Sprague*, Unterhaltsame Mathematik, Braunschweig 1961, komt de volgende opgave voor, waarvan de oplossing nog niet bekend is. Gegeven zijn n voorwerpen. Men vergelijkt hun gewichten door wegingen, waarbij telkens twee voorwerpen met elkaar vergeleken worden. Hoeveel wegingen heeft men minimaal nodig om de volgorde van hun gewichten vast te leggen?

Om u voor een te spoedige tevredenheid met uzelf te behoeden, voeg ik eraan toe, dat men voor $n = 5$ kan volstaan met 7 wegingen (vgl. nr. 66, oplossing in Euclides **37**, IX).

Gevraagd een zo snel mogelijke methode voor $n = 10$. Wilt u mij binnen drie weken uw oplossing zenden? Die met het kleinste aantal wegingen wordt gepubliceerd.

OPLOSSINGEN

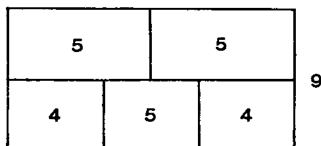
(zie voor de opgaven het vorige nummer)

79. a. Hieronder zijn de vertrekken nogmaals getekend. De deuren zijn weggelaten, maar in elk vertrek is een getal geplaatst, dat het aantal deuren van dat vertrek aangeeft. Het buitengebied kan men als een zesde vertrek opvatten, dat 9 deuren heeft. Wil er een wandeling mogelijk zijn, die aan de vraag voldoet, dan mag het aantal vertrekken met een oneven aantal deuren hoogstens 2 bedragen. Deze twee vertrekken moeten, als ze er zijn, begin- en eindpunt van de wandeling zijn.

Er is dus geen oplossing.

b. Als begin- en eindpunt van de wandeling samenvallen, mag er dus slechts één vertrek met een oneven aantal deuren zijn. Men kan op de wandeling dus hoogstens alle deuren op 2 na passeren. Dat een wandeling mogelijk is, waarbij alle deuren op 2 na gepasseerd worden, is gemakkelijk in te zien.

Als toegift kan men proberen te bewijzen, dat een wandeling van het type a altijd mogelijk is, als het aantal vertrekken met een oneven aantal deuren hoogstens 2 is, terwijl een dergelijke gesloten wandeling altijd mogelijk is, als dit aantal hoogstens 1 is.



80. Tot en met $a = 39$ is de uitkomst priem. Men ziet echter direct, dat dit niet het geval is voor $a = 40$ en voor $a = 41$.